9/4/20

Αξιωματική θεμελίωση

Τα διανύσματα του Newton για την κίνηση των σωμάτων είναι απολύτως αποδεκτά και επαληθεύονται πλήρως από πειράματα.

1ο αξίωμα (Νόμος της αδράνειας) Η κίνηση δε θέλει να δαπανήσει ενέργεια

Ένα σώμα παραμένει σε κατάσταση ηρεμίας ή ευθύγραμμης και ισοταχούς κίνησης (σταθερή ταχύτητα) εκτός αν επιδρά πάνω του μια δύναμη.

Για να ποσοτικοποιήσουμε το αξίωμα ορίζουμε την έννοια της ποσότητας κίνησης ή ορμής

$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$: ποσότητα που ακολουθεί την ταχύτητα δηλαδή το γινόμενο μάζας επί την ταχύτητα του σώματος. Η ταχύτητα δείχνει την κατεύθυνση => πάνω σε ποια θα γίνει κίνηση

Θεμελιώδης ποσότητα είναι η μάζα η οποία θα χαρακτηρίζει την ορμή

Φυσική σημασία: Αν $\vec{v}$ = σταθερή => $\vec{p}$ = σταθερή και άρα ένα ελεύθερο υλικό σημείο δεν μπορεί από μόνο του να αλλάξει την κινητική του κατάσταση: κάτι πρέπει να δράσει πάνω του

$2^{ο}$ Αξίωμα (Νόμος της επιτάχυνσης)

Η μεταβολή της ποσότητας κίνησης ενός υλικού σημείου είναι ανάλογη της δύναμης που επιδρά σ' αυτό και γίνεται κατά τη διεύθυνση της δύναμης.

Δηλαδή $\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})}$ (1)

ορίζω την F ως τη μεταβολή της p/dt

Όταν η μάζα είναι σταθερή $\boxed{\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}}$ (2)

Μπορεί σε ένα σωματίδιο να αλλάξει η μάζα του π.χ ένα αυτοκίνητο γι' αυτό ορίζω την F όπως στην (1)

Φυσική σημασία: Το αξίωμα εισάγει τις έννοιες της μάζας και της δύναμης και η σχέση τους καθορίζει την κίνηση του σώματος. Δηλαδή $\boxed{\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}}$ (*) Είναι μια $2^{ου}$ βαθμού διαφορική εξίσωση που καθορίζει την τροχιά του σώματος αν ξέρουμε την αρχική του θέση και ταχύτητα και φυσικά τη δύναμη $\vec{F}$

Αρχή του καθορισμού

Στα πλαίσια της κλασσικής μηχανικής η εξέλιξη ενός συστήματος είναι μονοσήμαντα καθορισμένη από την αρχική του κατάσταση (θέση, ταχύτητα) και το $2^{ο}$ αξίωμα του Newton

v_0 — διάνυσμα το

v_0 — παράγωγος

Ντετερμινιστικό σύστημα ν στο ο

αρχικές συνθήκες + τη διαφ. (*) που έχω

3ο Αξίωμα (Νόμος δράσης - αντίδρασης)

Οι δυνάμεις τις οποίες εξασκούν δύο υλικά σημεία το ένα στο άλλο είναι ίσες κατά μέτρο και αντίθετες σε φορά και ενεργούν στην ευθεία που ενώνει τα σημεία αυτά. Δηλαδή αν $\vec{F}_{12}$ η δύναμη που ασκεί το σώμα 1 στο 2 και $\vec{F}_{21}$ η δύναμη που ασκεί το 2 στο 1 τότε

$$\boxed{\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}}$$

Φυσική σημασία: Οι δυνάμεις εκδηλώνονται σε ζεύγη και μεμονωμένη δύναμη δεν υπάρχει

Ο χώρος και ο χρόνος

Ο χώρος θεωρείται συνεχής, ομογενής και ισότροπος και τα αποτελέσματα ενός πειράματος είναι ανεξάρτητα των χωρικών του συντεταγμένων και του προσανατολισμού του.

Ο χρόνος είναι ομογενής δηλαδή τα αποτελέσματα ενός πειράματος είναι ίδια για διαφορετικές χρονικές στιγμές εκτέλεσης του πειράματος

Είδη δυνάμεων

- → Βαρυτικές δυνάμεις που μας κρατάν "κολλημένους" στη Γη
- → Ηλεκτρομαγνητικές φως
- → Ισχυρές πυρηνικές δυνάμεις που κρατάν τα άτομα στον πυρήνα
- → Ασθενείς -"-

Μονάδα: 1Nt (ή N): Είναι η δύναμη που θα δώσει σε μάζα 1kgr επιτάχυνση $1\,m/sec^2$

Το έχουμε ξανά κάνει το παράδειγμα τώρα κάνω το ανάποδο

Παράδειγμα: Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται στο επίπεδο xy με τροχιά $\vec{r}(t) = (\underbrace{a\cos\omega t}_{x})\hat{i} + (\underbrace{b\sin\omega t}_{y})\hat{j}$

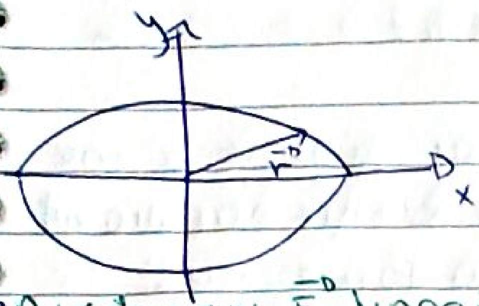
$a, b > 0$

$\omega > 0$

Να δείξετε ότι το σωματίδιο κινείται σε έλλειψη και η δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο έχει πάντα κατεύθυνση προς την αρχή των αξόνων

Λύση

Πράγματι αν $\begin{cases} x = a\cos\omega t \\ y = b\sin\omega t \end{cases}$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$: έλλειψη



Αντίστοιχα $\boxed{\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -m\omega^2\vec{r}}$ (*)

παραγωγίζω 2 φορές ως προς t

Δηλαδή η δύναμη που ασκείται έχει φορά προς το κέντρο της έλλειψης

• Αν ξέρω την $\vec{F}$ μπορώ ν. β. την τροχιά? Αρκεί να λύσω τη διαφορική εξίσωση (*)

Παρατήρηση: Ποιες δυνάμεις εξαναγκάζουν σε τέτοιες τροχιές? Έχω την $\vec{F}$ ψάχνω την τροχιά

Νόμος παγκόσμιας έλξης

Ο βασικός νόμος που καθορίζει τις βαρυτικές δυνάμεις είναι ο Νόμος της Παγκόσμιας έλξης του Newton: Δύο υλικά σημεία έλκονται μεταξύ τους με δύναμη ανάλογη των μαζών τους και αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της μεταξύ τους απόστασης. Η δύναμη ενεργεί στην ευθεία που συνδέει τα 2 σημεία

Δηλαδή

$$\vec{F} = -G\frac{M_1 M_2}{r^2}\hat{r} \quad \text{και} \quad G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{Nt \cdot m^2}{kg^2}$$

Έτσι το βάρος μας δίνεται αν αντικαταστήσουμε

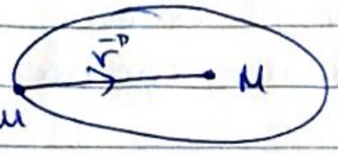
$$\vec{B} = -G\frac{M_{ΓΗΣ}\, m}{R^2_{ΓΗΣ}}\hat{r} = -g m \hat{r}$$

$$g = G\frac{M_{ΓΗΣ}}{R^2_{ΓΗΣ}}$$

Εφαρμογές

Οι τροχιές των πλανητών είναι επίπεδες

Έστω ένας πλανήτης που περιστρέφεται γύρω από τον Ήλιο. (το είδος της τροχιάς θα το δούμε παρακάτω) Απο το νόμο του Newton και το νόμο της παγκόσμιας έλξης



$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \Rightarrow -G\frac{Mm}{|\vec{r}|^2}\hat{r} = m\ddot{\vec{r}} \Rightarrow \ddot{\vec{r}} = -G\frac{M}{|\vec{r}|^2}\vec{r}$$

Δηλαδή $\vec{r}\times\ddot{\vec{r}} = 0$, διότι $\ddot{\vec{r}}$ και $\vec{r}$ είναι ανάλογα/παραλ

Όμως $\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\dot{\vec{r}}) = \dot{\vec{r}}\times\dot{\vec{r}} + \vec{r}\times\ddot{\vec{r}} = \vec{0} + \vec{r}\times\ddot{\vec{r}}$

Δηλαδή $\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\dot{\vec{r}}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{r}\times\dot{\vec{r}} = \vec{c}$

Άρα τροχιά και ταχύτητα βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο κάθετο στο σταθερό διάνυσμα $\vec{c}$

Πρώτος νόμος του Kepler (Νόμος κωνικών τομών)

Η τροχιά ενός πλανήτη είναι κωνική τομή με τον ήλιο στη μία εστία της. Η εκκεντρότητα της είναι:

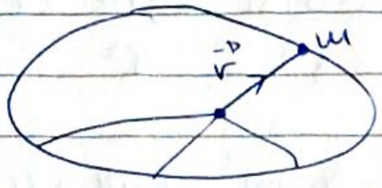
$$e = \frac{r_0 v_0^2}{GM} - 1$$

και η τροχιά $r = \frac{(1+e) r_0}{1 + e\cos\theta}$, r_0, v_0 η αρχική θέση και ταχύτητα του πλανήτη

M: είναι η μάζα του ήλιου

Δεύτερος νόμος του Kepler (Νόμος ίσων εμβαδών)

Το διάνυσμα που συνδέει τον ήλιο με τον πλανήτη διαγράφει ίσα εμβαδά σε ίσους χρόνους



Γνωρίζουμε ότι $\vec{c} = \vec{r} \times \vec{v} = \vec{r} \times \vec{v}$

Όμως $\vec{r} = r\hat{r}$

$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$

Δηλαδή $\vec{c} = r\hat{r} \times (\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}) = r^2\dot{\theta}\,\hat{r}\times\hat{\theta} = r^2\dot{\theta}\hat{k}$

Όμως το $\vec{c}$ είναι σταθερό διάνυσμα δηλαδή

$\vec{c} = c_0\hat{k}$, $c_0 = r_0^2\dot{\theta}_0 = r_0(r_0\dot{\theta}_0) = r_0 v_0$

Άρα $r^2\dot{\theta} = r_0 v_0$

Γνωρίζουμε ότι το στοιχειώδες εμβαδόν σε πολικές συντ/νες είναι:

$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$, δηλ. $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r_0 v_0$

Απόδειξη του $1^{ου}$ νόμου

Επανερχόμαστε στο νόμο του Newton

$$m\vec{a} = -\frac{GmM}{|\vec{r}|^2}\hat{r} = -\frac{GmM}{r^2}\hat{r}$$

και έχουμε ήδη δείξει ότι $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}$

Δηλαδή, $\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\dfrac{GM}{r^2} \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0 \end{cases}$

Επίσης γνωρίζουμε ότι $r^2\dot{\theta} = r_0 v_0 \Rightarrow 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0$, άρα:

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\left(\dfrac{r_0 v_0}{r^2}\right)^2 = -\dfrac{GM}{r^2} \\ \dot{\theta} = \dfrac{r_0 v_0}{r^2} \end{cases} \Rightarrow \ddot{r} = \frac{(r_0 v_0)^2}{r^3} - \frac{GM}{r^2} \quad \times \dot{r}$$

$$\frac{(\dot{r})^2}{2} = -\frac{1}{2}\frac{(r_0 v_0)^2}{r^2} + \frac{GM}{r} + C_1 \Rightarrow (\dot{r})^2 = -\frac{(r_0 v_0)^2}{r^2} + \frac{2GM}{r} + 2C_1$$

όπου $C_1 = \dfrac{1}{2}\left(v_0^2 + \dfrac{r_0^2 v_0^2}{r_0^2} - \dfrac{2GM}{r_0}\right)$

Θέτουμε $\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{dr}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} = r'\dot{\theta} = \dfrac{r' r_0 v_0}{r^2}$ και τελικά

$$\boxed{\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{2GM}{(r_0 v_0)^2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}$$

Τρίτος νόμος του Kepler

Ο χρόνος T που χρειάζεται ο πλανήτης για μια πλήρη περιφορά γύρω από τον ήλιο (περίοδος) και ο μεγάλος ημιάξονας α συνδέονται

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

Άμεση συνέπεια $dA = \frac{1}{2} r_0 v_0 \, dt \Rightarrow A = \int_0^T \frac{1}{2} r_0 v_0 \, dt =$

$= \frac{1}{2} r_0 v_0 T$

$A = \pi a b$

$b = a\sqrt{1-e^2}$